

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

Ивановский государственный энергетический университет

Кафедра теоретических основ теплотехники

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА НЕСТАЦИОНАРНОЙ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
ТВЕРДЫХ ТЕЛ НА ИМИТАЦИОННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Методическое указание к лабораторной работе

Иваново 2003

Составители: В.В. БУХМИРОВ
Т.Е. СОЗИНОВА
С.В. НОСОВА
К.Б. НИКИТИН

Редактор А.А. Варенцов

В методических указаниях изложена технология математического моделирования на примере аналитического и численного решения краевой задачи теории теплопроводности для тел классической и сложной формы. Приведены типовые задания для студентов, порядок выполнения лабораторной работы и контрольные вопросы.

Методические указания утверждены цикловой методической комиссией ТЭФ

Рецензент
кафедра теоретических основ теплотехники Ивановского государственного
энергетического университета

1. Цель работы

а) применение численных имитационных математических моделей для исследования нестационарной теплопроводности в твердых телах;

б) изучение технологии математического моделирования на примере расчета режимов нагрева и охлаждения твердых тел простейшей и сложной формы при граничных условиях I, II, и III рода.

2. Математическая формулировка задачи

Дифференциальное уравнение теплопроводности для тел простейшей или классической формы, к которым относят неограниченную пластину, неограниченный цилиндр и шар, имеет вид

$$c' \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + (k - 1) \frac{\lambda}{x} \frac{\partial T}{\partial x} + q_v, \quad (1)$$

или при допущении независимости теплофизических коэффициентов (c' и λ) от температуры и отсутствии внутренних источников теплоты ($q_v=0$) уравнение (1) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{k - 1}{x} \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (2)$$

В дифференциальных уравнениях (1) и (2): T - температура, °С или К; τ - время, с; x - координата, направленная поперек пластины или вдоль радиуса цилиндра и шара, м; c' - удельная объемная теплоемкость, Дж/(м³К); λ - коэффициент теплопроводности, Вт/(мК); $a = \lambda/c'$ - коэффициент температуропроводности, м²/с; $k=1,2$ или 3 - коэффициент формы неограниченной пластины, неограниченного цилиндра или шара соответственно; q_v - мощность внутренних источников (стоков) теплоты, Вт/м³.

Условия однозначности задают границы расчетной области в пространстве и времени, числовые значения теплофизических коэффициентов и краевые условия.

При симметричном нагреве или охлаждении тел в качестве расчетной области целесообразно принять половину толщины пластины и интервал $0 \leq x \leq d/2$ для цилиндра и шара, где d - диаметр цилиндра или шара (рис.1). В этом случае расчетный размер области исследования равен:

для пластины $R=d/2$, где d - толщина пластины;
для цилиндра $R=d_{ц}/2=r_{ц}$, где $r_{ц}$ - радиус цилиндра;
для шара $R=d_{ш}/2=r_{ш}$, где $r_{ш}$ - радиус шара.

Численное решение краевой задачи теории теплопроводности требует задания условия окончания вычислительного процесса. В данной численной модели расчет нагрева или охлаждения заканчивается в момент достижения заданного пользователем (студентом или преподавателем) времени процесса.

К краевым условиям дифференциальной задачи относят начальное условие и граничные условия, задаваемые на внутренней ($x=0$) и внешней ($x=R$) границах расчетной области. В качестве начального условия применим равномерное распределение температуры T_0 по сечению тела (см. рис.1):

$$T(x,0) = T_0, \quad 0 \leq x \leq R. \quad (3)$$

Граничное условие на внутренней границе при $x=0$ является следствием симметрии температурного поля:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (4)$$

Заметим, что при $k=2$ и $k=3$ второе слагаемое в правой части дифференциального уравнения (2) при $x=0$ дает неопределенность типа $0/0$, раскрывая которую по правилу Лопиталя, имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = ak \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{при } x = 0. \quad (5)$$

На внешней границе тела зададим:

— либо температуру поверхности T_w (граничное условие I рода):

$$T(R,\tau) = T_w; \quad (6)$$

— либо плотность теплового потока (граничное условие II рода):

$$\pm \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=R} = q_w; \quad (7)$$

— либо линейное граничное условие III рода, соответствующее постоянной температуре окружающей среды T_f и постоянному, не зависящему от температуры коэффициенту теплоотдачи α , Вт/(м²К):

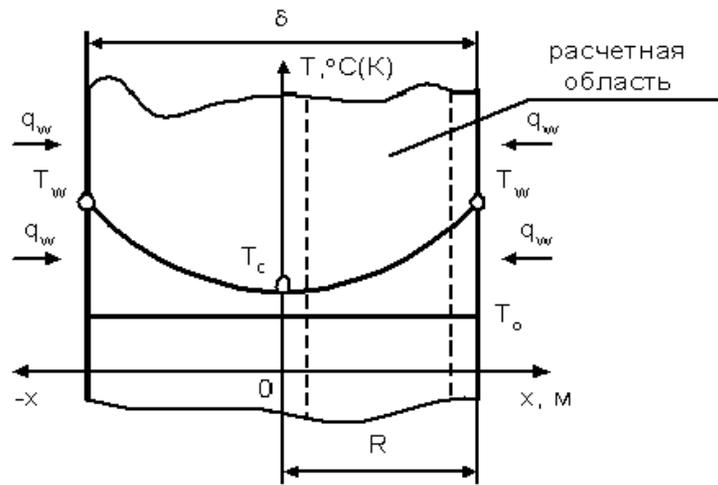
$$\pm \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=R} = \alpha(T_f - T_w). \quad (8)$$

Знак в левой части выражений (7) и (8) зависит от выбора начала координат. Если начало координат расположено в средней плоскости пластины, на оси цилиндра или в центре шара при их симметричном нагреве или охлаждении, то в левой части формул (7) и (8) будет стоять знак «+».

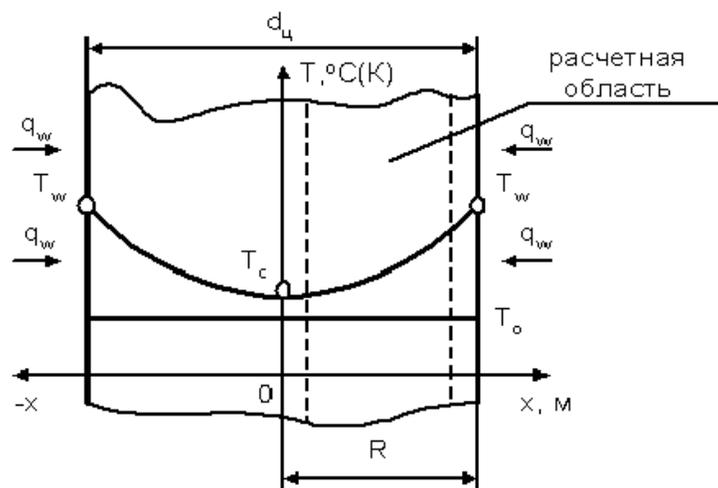
Запишем систему уравнений (2)÷(7) в безразмерной форме. Дифференциальное уравнение теплопроводности в этом случае примет вид:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X} \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \quad (9)$$

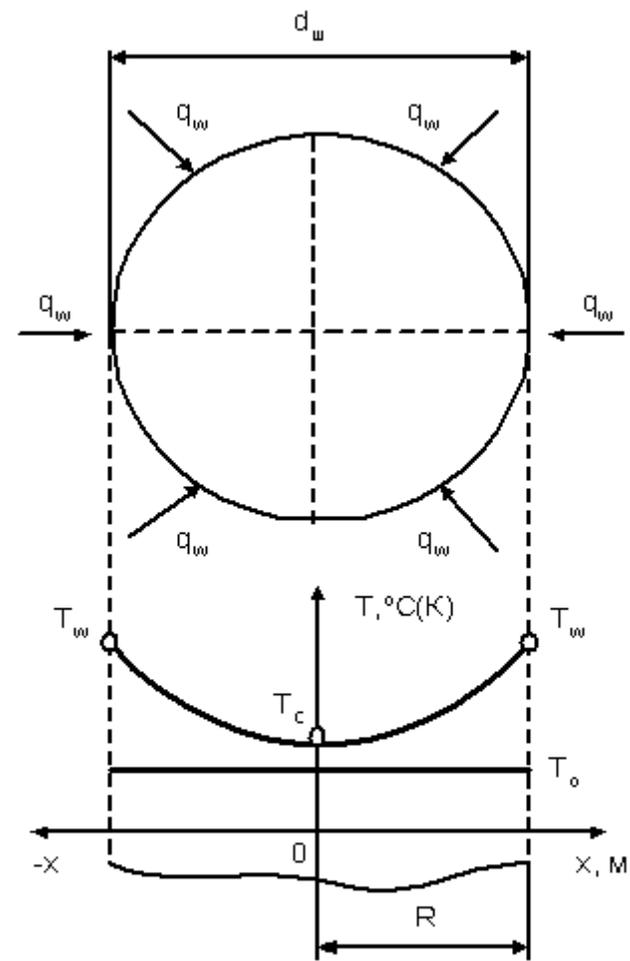
где $Fo = at/R^2$ - критерий Фурье; $X=x/R$ - безразмерная координата; R - размер расчетной области; Θ - безразмерная температура.



а)



б)



в)

Рис.1. К заданию условий однозначности для неограниченной пластины (а), неограниченного цилиндра (б) и шара (в)

При граничных условиях II рода безразмерная температура определяется комплексом

$$\Theta = \frac{\lambda(T - T_0)}{q_w R}, \quad (10)$$

а при граничных условиях III рода как

$$\Theta = \frac{T_f - T}{T_f - T_0}. \quad (11)$$

Начальное условие в безразмерном виде:

— при граничных условиях II рода

$$\Theta(X, 0) = 0; \quad (12)$$

— при граничных условиях III рода

$$\Theta(X, 0) = 1. \quad (13)$$

Граничные условия на внутренней границе тела:

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=0} = 0. \quad (14)$$

Граничные условия на внешней границе тела:

— граничное условие II рода:

$$\pm \left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=1} = 1; \quad (15)$$

— граничное условие III рода:

$$\pm \left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=1} = Bi \Theta_w, \quad (16)$$

где $Bi = \alpha R / \lambda$ - критерий Био, а $\Theta_w = (T_f - T_w) / (T_f - T_0)$.

Знак в левой части выражений (15) и (16) зависит от выбора начала координат.

3. Численная реализация и алгоритм решения краевой задачи нестационарной теплопроводности

Для решения поставленной выше краевой задачи теории теплопроводности применим метод конечных разностей. Основная идея этого численного метода заключается в том, что непрерывная область изменения пространственной переменной $0 \leq x \leq R$ заменяется совокупностью дискретно расположенных узловых точек $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N$. При равномерном расположении этих точек в расчетной области их координаты равны $x_i = i \Delta x$, где $i=0, 1, \dots, N$ - номер узла по пространству, а $\Delta x = R/N$ - шаг по пространству. Аналогично вместо непрерывного изменения температурного поля во времени рассматривают значения температуры в

фиксированные моменты времени $\tau_m = m \Delta\tau$, где $m = 1, 2, \dots$ — номер момента времени, а $\Delta\tau$ - шаг

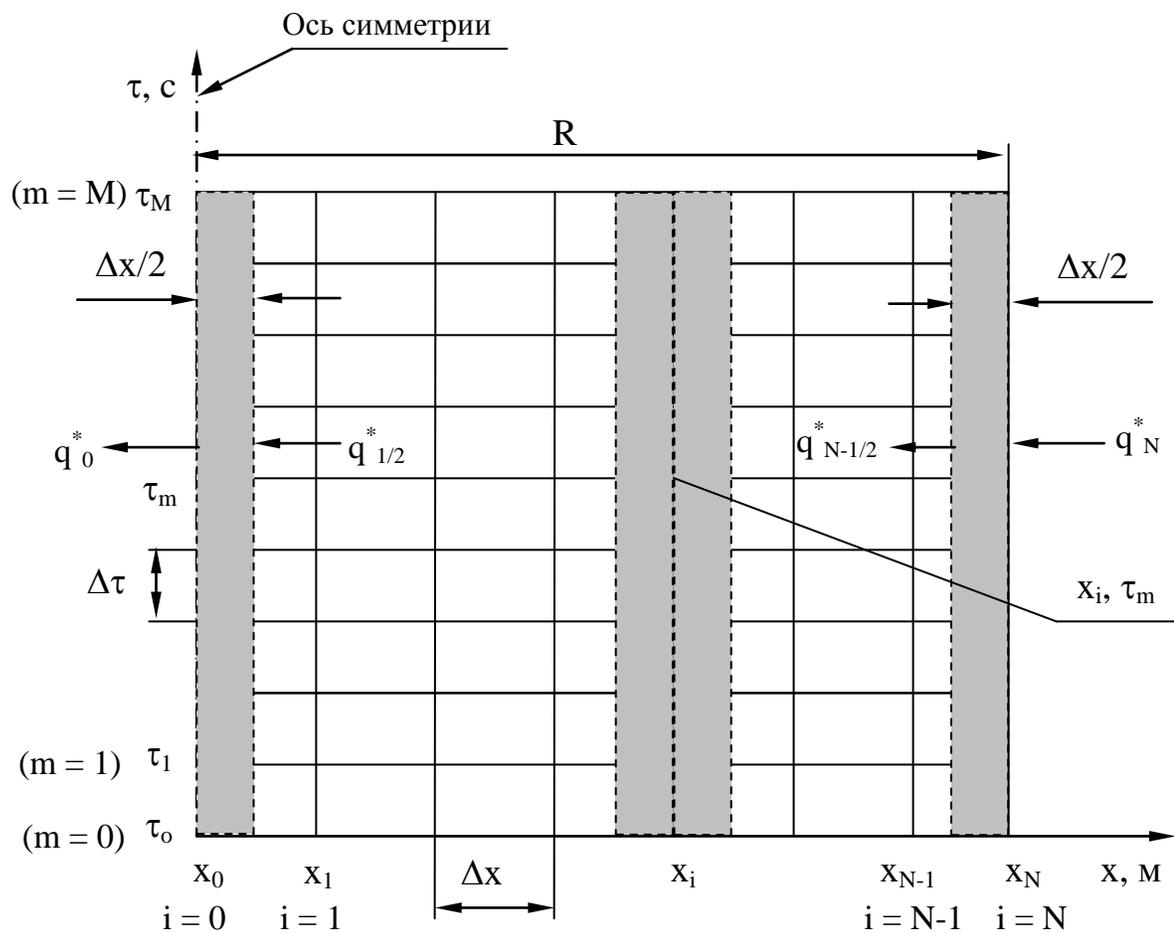


Рис. 2. Прямоугольная равномерная сетка в плоскости (x, τ)

по времени. В плоскости (x, τ) совокупность узловых точек с координатами (x_i, τ_m) образует прямоугольную сетку, изображенную на рис.2. При этом расчет температурного поля $T(x, \tau)$ сводится к отысканию сеточной функции T_i^m , приближенно характеризующей температуру в узловых точках.

При замене непрерывной функции $T(x, \tau)$ дискретной сеточной функцией T_i^m необходимо заменить дифференциальное уравнение теплопроводности с соответствующими краевыми условиями системой разностных алгебраических уравнений, связывающих значения сеточной функции в соседних узловых точках. Эта система алгебраических уравнений называется разностной схемой решения исходной краевой задачи. В принципе можно построить бесчисленное множество разностных схем, отличающихся по точности и эффективности. Мы рассмотрим явную и две неявные разностные схемы: чисто неявную четырехточечную разностную схему и шеститочечную разностную схему Кранка-Николсона [1]. Построение разностных схем производят обычно путем некоторого преобразования исходной дифференциальной задачи теплопроводности. Это преобразование может быть выполнено двумя основными способами.

Первый способ, называемый методом разностной аппроксимации, заключается в приближенной замене производных, фигурирующих в уравнении теплопроводности и граничных условиях, их разностными аналогами, т.е. выражениями, зависящими от разностей значений температур в соседних узловых точках. Чтоб произвести такую замену, следует разложить функцию $T(x, \tau)$ в окрестностях каждой узловой точки в ряд Тейлора и ограничиться конечным числом членов разложения.

Второй способ, называемый методом контрольного объема, заключается в составлении уравнения теплового баланса для каждой элементарной ячейки сеточной области. Эти уравнения выводятся путем интегрирования уравнения теплопроводности по координате и времени в пределах элементарной ячейки, с последующей заменой получающихся интегралов приближенными разностными выражениями.

Итак, применяя метод разностной аппроксимации, для всех внутренних узлов сетки $(i=1, 2, \dots, N-1)$ запишем систему алгебраических разностных уравнений

$$\frac{T_i^{m+1} - T_i^m}{\Delta \tau} = a \left[\frac{T_{i+1}^* - 2T_i^* + T_{i-1}^*}{\Delta x^2} + (k-1) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_{i+1/2}} \frac{T_{i+1}^* - T_i^*}{\Delta x} + \frac{1}{x_{i-1/2}} \frac{T_i^* - T_{i-1}^*}{\Delta x} \right) \right] + \frac{q_{v,i}^*}{c}, \quad (17)$$

в которой

$$x_{i+1/2} = (x_{i+1} + x_i)/2; \quad x_{i-1/2} = (x_i + x_{i-1})/2.$$

Дифференциальное уравнение (5) для оси симметрии ($i=0$) аппроксимируем аналогично

$$\frac{T_0^{m+1} - T_0^m}{\Delta \tau} = ak \frac{T_1^* - 2T_0^* + T_{-1}^*}{\Delta x^2} + \frac{q_{v,0}^*}{c'},$$

или, принимая во внимание равенство $T_{-1} = T_1$, которое следует из условия симметрии температурного поля, окончательно получим

$$\frac{T_0^{m+1} - T_0^m}{\Delta \tau} = ak \frac{2T_1^* - 2T_0^*}{\Delta x^2} + \frac{q_{v,0}^*}{c'}. \quad (18)$$

Заметим, что тот же самый результат можно получить для неограниченной пластины, применив метод контрольного объема к левому крайнему слою шириной $\Delta x/2$ (см. рис.2).

В формулах (17) и (18) температура T^* есть некая средняя температура на интервале времени $\Delta \tau$:

$$T^* = (1 - \mu)T^m + \mu T^{m+1}, \quad (19)$$

где μ - коэффициент веса, учитывающий вклад температуры T^{m+1} на $(m+1)$ -м временном слое в значение температуры T^* .

Коэффициент веса равный нулю ($\mu=0$) приводит к равенству $T^*=T^m$, и мы получаем так называемую явную разностную схему (ЯРС). Значение $\mu=1$ дает $T^* = T^{m+1}$, и получаем чисто неявную разностную схему (ЧНРС). При $\mu=0,5$ разностная схема (17) и (18) называется разностной схемой Кранка-Николсона (РСК-Н).

Температура в $(m+1)$ -й момент времени на внешней границе тела при граничных условиях I рода (6) рассчитывается по формуле

$$T_N^{m+1} = T_w, \quad (20)$$

Для определения температуры на внешней границе в $(m+1)$ -й момент времени T_N^{m+1} при граничных условиях II и III рода применим метод контрольного объема (метод теплового баланса) для приграничного слоя толщиной $\Delta x/2$ (см. рис.2). Расчет температуры T_N^{m+1} приведем для процесса теплопроводности в бесконечной пластине:

а) граничные условия II рода:

$$c' \frac{\Delta x}{2} (T_N^{m+1} - T_N^m) = \left[q_w - \lambda \frac{T_N^* - T_{N-1}^*}{\Delta x} \right] \Delta \tau + q_{v,N}^* \Delta \tau; \quad (21)$$

б) граничные условия III рода:

$$c' \frac{\Delta x}{2} (T_N^{m+1} - T_N^m) = \left[\alpha (T_f - T_N^*) - \lambda \frac{T_N^* - T_{N-1}^*}{\Delta x} \right] \Delta \tau + q_{v,N}^* \Delta \tau. \quad (22)$$

В формулах (21) и (22) температура T^* рассчитывается по выражению (19).

3.1. Явная разностная схема

Явная разностная схема для расчета температуры T_i^{m+1} использует значения температуры в предыдущий m -й момент времени в узлах $(i-1)$, i и $(i+1)$, т.е. T_{i-1}^m , T_i^m , T_{i+1}^m . В этом случае в формулы (17), (18), (21) и (22) вместо температуры T^* необходимо подставить температуру T^m .

Выражая из разностных уравнений (17), (18), (21) и (22) неизвестную температуру T_i^{m+1} , получаем:

а) внутренняя граница $i=0$:

$$T_0^{m+1} = (1 - 2fk)T_0^m + 2fkT_1^m + q_{v,0}^m \frac{\Delta\tau}{c}; \quad (23)$$

б) внутренние узлы $i=1, 2, \dots, N-1$:

$$T_i^{m+1} = f(1 - I_k^-)T_{i-1}^m + [1 - 2f(1 + 0,5I_k^+ - 0,5I_k^-)]T_i^m + f(1 + I_k^+)T_{i+1}^m + q_{v,i}^m \frac{\Delta\tau}{c}, \quad (24)$$

где $I_k^- = (k-1) \frac{0,5}{i-0,5}$; $I_k^+ = (k-1) \frac{0,5}{i+0,5}$;

в) внешняя граница, $i=N$:

— граничные условия II рода:

$$T_N^{m+1} = (1 - 2f)T_N^m + 2f(T_{N-1}^m + \Delta T) + q_{v,N}^m \frac{\Delta\tau}{c}, \quad (25)$$

где $\Delta T = q_w \Delta x / \lambda$;

— граничные условия III рода:

$$T_N^{m+1} = (1 - 2f(b+1))T_N^m + 2fT_{N-1}^m + 2fbT_f + q_{v,N}^m \frac{\Delta\tau}{c}. \quad (26)$$

В формулах (23)-(26): k - коэффициент формы тела; $f = a\Delta\tau/\Delta x^2$ - разностный критерий Фурье; $b = \alpha\Delta x/\lambda$ - разностный критерий Био.

Явная разностная схема устойчива, если

$$f \leq \frac{1}{2} \text{ при граничных условиях I и II рода,} \quad (27)$$

$$f \leq \frac{1}{2(1+b)} \text{ при граничных условиях III рода.} \quad (28)$$

В заключение раздела приведем алгоритм применения явной разностной схемы для решения краевой задачи теории теплопроводности.

1. Задавая число слоев разбиения по координате N , рассчитывают шаг по пространству

$$\Delta x = R/N.$$

2. Выбирают шаг по времени, учитывая условия устойчивости (27) или (28).

3. В начальный момент времени ($m=0$) всем узлам сетки присваивают значения температуры T_i^m ($i=0,1,\dots, N-1, N$) исходя из заданного начального условия. При равномерном распределении температуры в момент времени $\tau = 0$:

$$T_i^m = T_0. \quad (29)$$

Замечание. При граничных условиях I рода значение температуры на внешней границе тела в начальный момент времени $\tau = 0$ равно

$$T_N^0 = T_w. \quad (30)$$

4. Выполняют шаг во времени $\Delta\tau$ и определяют расчетный номер момента времени и текущее время процесса

$$m = m+1; \tau_m = m\Delta\tau. \quad (31)$$

5. Рассчитывают температуру на внутренней T_0^{m+1} и внешней T_N^{m+1} границах расчетной области по формулам (20), (23), (25) или (26) в $(m+1)$ -й момент времени.

6. Рассчитывают температуру во внутренних узлах сетки по формуле (24).

7. Проводят анализ окончания итерационного процесса:

а) либо по времени процесса;

б) либо по значению температуры в заданной точке тела.

3.2. Неявные разностные схемы

К неявным разностным схемам расчета теплопроводности относят все схемы, использующие для определения искомой температуры в $m+1$ – ый момент времени (T_i^{m+1}) значение температур на интервале времени $\tau_m < \tau \leq \tau_{m+1}$. В этом случае, коэффициент веса в формуле (19) при расчете температуры T^* лежит в интервале $0 < \mu \leq 1$. При отсутствии внутреннего источника теплоты ($q_v = 0$), разностные уравнения (17), (18), (21) и (22) принимают следующий вид:

а) внутренняя граница $i=0$:

$$\frac{T_0^{m+1} - T_0^m}{\Delta\tau} = 2ak \left[(1-\mu) \frac{T_1^m - T_0^m}{\Delta x^2} + \mu \frac{T_1^{m+1} - T_0^{m+1}}{\Delta x^2} \right]; \quad (32)$$

б) внутренние узлы $i=1,2,\dots,N-1$:

$$\frac{T_i^{m+1} - T_i^m}{\Delta\tau} = a \left\{ (1-\mu) \left[\frac{T_{i+1}^m - 2T_i^m + T_{i-1}^m}{\Delta x^2} + (k-1) \frac{1}{2} * \right. \right.$$

$$* \left(\frac{1}{x_{i+1/2}} \frac{T_{i+1}^m - T_i^m}{\Delta x} + \frac{1}{x_{i-1/2}} \frac{T_i^m - T_{i-1}^m}{\Delta x} \right) \Bigg] + \mu \left[\frac{T_{i+1}^{m+1} - 2T_i^{m+1} + T_{i-1}^{m+1}}{\Delta x^2} + (k-1) \frac{1}{2} * \right. \\ \left. * \left(\frac{1}{x_{i+1/2}} \frac{T_{i+1}^{m+1} - T_i^{m+1}}{\Delta x} + \frac{1}{x_{i-1/2}} \frac{T_i^{m+1} - T_{i-1}^{m+1}}{\Delta x} \right) \right] \Bigg\}; \quad (33)$$

в) внешняя граница $i=N$:

— граничные условия II рода:

$$c' \frac{\Delta x}{2} (T_N^{m+1} - T_N^m) = \left[q_w - \lambda \left((1-\mu) \frac{T_N^m - T_{N-1}^m}{\Delta x} + \mu \frac{T_N^{m+1} - T_{N-1}^{m+1}}{\Delta x} \right) \right] \Delta \tau; \quad (34)$$

— граничные условия III рода:

$$c' \frac{\Delta x}{2} (T_N^{m+1} - T_N^m) = \left[\alpha (T_f - (1-\mu) T_N^m - \mu T_N^{m+1}) - \right. \\ \left. - \lambda \left((1-\mu) \frac{T_N^m - T_{N-1}^m}{\Delta x} + \mu \frac{T_N^{m+1} - T_{N-1}^{m+1}}{\Delta x} \right) \right] \Delta \tau. \quad (35)$$

Замечание. Если в расчетном узле $i = 0, 1, \dots, N-1, N$ действует внутренний источник (сток) теплоты мощностью q_v , то в этом случае в правую часть уравнений (32)÷(35) необходимо добавить слагаемое $q_{v,i} \Delta \tau / c'$.

Систему алгебраических разностных уравнений (32)÷(35) удобно представить в виде

$$A_i T_{i+1}^{m+1} - B_i T_i^{m+1} + C_i T_{i-1}^{m+1} + P_i = 0, \text{ для } i = 0, 1, \dots, N. \quad (36)$$

Выражения для коэффициентов A_i, B_i, C_i и свободного члена P_i в системе уравнений (36), полученные методами контрольного объема и разностной аппроксимации, приведены в табл. 1, 2 и 3. Условные обозначения в табл. 1, 2 и 3 аналогичны обозначениям в формулах (24)÷(26).

Замечание. Если в каком либо узле присутствует внутренний источник теплоты ($q_v \neq 0$), то для этого узла свободный член равен $P_i = P_i + q_{v,i} \Delta \tau / c'$.

Система разностных уравнений (36) представляет собой систему $(N+1)$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $T_i^{m+1}, i=0,1,\dots,N$ с трехдиагональной матрицей коэффициентов перед неизвестными. Для решения такой системы уравнений применяют эффективный метод прогонки.

Суть метода прогонки заключается в том, что решение системы разностных уравнений представляют в виде

$$T_i^{m+1} = \alpha_i^{m+1} T_{i+1}^{m+1} + \beta_i^{m+1}, i = 0, 1, \dots, N, \quad (37)$$

где α_i^{m+1} и β_i^{m+1} - некоторые вспомогательные коэффициенты, называемые коэффициентами прогонки.

На каждом шаге по времени задача определения температуры сводится сначала к расчету α_i^{m+1} и β_i^{m+1} по рекуррентным формулам (прямая прогонка):

$$\alpha_i^{m+1} = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}^{m+1}}; \quad \beta_i^{m+1} = \frac{C_i \beta_{i-1}^{m+1} + P_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}^{m+1}}, \quad (38)$$

а затем к определению температурного поля по формуле (37) (обратная прогонка).

Использование неявных разностных схем рекомендуется выполнять в следующей последовательности:

1. Выбирают шаг по пространству Δx и шаг по времени Δt .

При этом для разностных схем с коэффициентом веса $0 < \mu < 0,5$ на величину шагов Δx и Δt действует ограничение по устойчивости:

$$f \leq \frac{1}{2(1 - 2\mu)} \text{ при граничных условиях I и II рода,} \quad (39)$$

$$f \leq \frac{1}{2(1 - 2\mu)(1 + b)} \text{ при граничных условиях III рода.} \quad (40)$$

При $0,5 \leq \mu \leq 1$ неявные разностные схемы являются абсолютно устойчивыми и для расчета можно принять любое значение разностного критерия Фурье $f = a\Delta t / \Delta x^2$. Однако следует помнить, что величина шагов Δx и Δt влияет на точность расчета. Поэтому с уменьшением шагов Δx и Δt точность разностного численного решения повышается.

2. Задают начальное распределение температуры.

В нашем случае равномерного начального температурного поля (3) имеем

$$T_i^0 = T_0, \quad i=0,1,\dots,N-1,N. \quad (41)$$

3. Выполняют шаг по времени Δt и рассчитывают текущее время процесса по формуле (31).

4. Рассчитывают коэффициенты A_i , B_i , C_i и свободный член системы разностных уравнений P_i (табл. 1, 2, 3) для всех узлов $i=0,1,\dots,N-1,N$.

5. Определяют коэффициенты прогонки по формулам (38) для всех узлов $i=0,1,\dots,N-1,N$ (прямая прогонка).

6. Находят температуру в узлах $i = N, N-1, \dots, 1, 0$ по основной формуле прогонки (37) (обратная прогонка).

Замечание. Температура на внешней границе расчетной области равна

$$T_N^{m+1} = \beta_N^{m+1}. \quad (42)$$

7. Переходят к расчету следующего во времени распределения температуры по координате, начиная с пункта 3, либо заканчивают расчет в зависимости от заданных условий задачи (см. раздел 3.1).

Таблица 1. Коэффициенты разностного уравнения (36) для внешней границы расчетной области $i=N$ без учета кривизны тела

Коэф. уравн. (36)	Внешняя граница $i=N$		
	I род	II род	III род
A_N	0	0	0
B_N	1	$1 + 2 f \mu$	$1 + 2 f \mu (1+b)$
C_N	0	$2 f \mu$	$2 f \mu$
P_N	T_w	$[1 - 2 f (1 - \mu)] T_N^m + 2 f (1 - \mu) T_{N-1}^m + 2 f \Delta T$	$[1 - 2 f (1 - \mu)(1 + b)] T_N^m + 2 f (1 - \mu) T_{N-1}^m + 2 f b T_f$

Таблица 2. Коэффициенты разностного уравнения (36) для внешней границы расчетной области $i=N$ с учетом кривизны тела

Коэф. уравн. (36)	Внешняя граница $i=N$		
	I род	II род	III род
A_N	0	0	0
B_N	1	$1 + f \mu K_N^-$	$1 + f \mu (b K_N^+ + K_N^-)$
C_N	0	$f \mu K_N^-$	$f \mu K_N^-$
P_N	T_w	$[1 + f K_N^- (1 - \mu)] T_N^m + f K_N^- (1 - \mu) T_{N-1}^m + f K_N^+ \Delta T$	$[1 - f (1 - \mu)(b K_N^+ + K_N^-)] T_N^m + f (1 - \mu) K_N^- T_{N-1}^m + K_N^+ f b T_f$

В таблице 2.: $K_N^+ = \frac{k N^{k-1}}{N^k - (N - 0,5)^k}$, $K_N^- = \frac{k(N - 0,5)^{k-1}}{N^k - (N - 0,5)^k}$.

Таблица 3. Коэффициенты разностного уравнения (36) в узлах $0 \leq i \leq N - 1$

Коэф. Уравн (36)	Граничные условия I, II, III рода			
	Внутренняя граница $i = 0$		Внутренние узлы $1 \leq i \leq N - 1$	
	I род	II род ($q_v=0$)	Контрольный объем	Разностная аппроксимация
A_i	0	$2 k f \mu$	$f \mu K_i^+$	$f \mu (1 + I_k^+)$
B_i	1	$1 + 2 k f \mu$	$1 + f \mu (K_i^+ + K_i^-)$	$1 + 2 f \mu (1 + 0,5 I_k^+ - 0,5 I_k^-)$
C_i	0	0	$f \mu K_i^-$	$f \mu (1 - I_k^-)$
P_i	$T_{w,0}$	$[1 - 2 k f (1 - \mu)] T_0^m +$ $+ 2 k f (1 - \mu) T_1^m$	$f (1 - \mu) (K_i^+) T_{i+1}^m + [1 - f (1 - \mu) \cdot$ $(K_i^+ + K_i^-)] T_i^m +$ $f (1 - \mu) (K_i^-) T_{i-1}^m$	$f (1 - \mu) (1 + I_k^+) T_{i+1}^m + [1 - 2 f (1 - \mu) \cdot$ $(1 + 0,5 I_k^+ - 0,5 I_k^-)] T_i^m$ $+ f (1 - \mu) (1 - I_k^-) T_{i-1}^m$

В таблице 3.: $K_i^+ = \frac{k(i + 0,5)^{k-1}}{(i + 0,5)^k - (i - 0,5)^k}$; $K_i^- = \frac{k(i - 0,5)^{k-1}}{(i + 0,5)^k - (i - 0,5)^k}$; $I_k^+ = (k - 1) \frac{0,5}{i + 0,5}$; $I_k^- = (k - 1) \frac{0,5}{i - 0,5}$.

3.3. Температурные поля тел сложной формы

Телами сложной формы называются тела, которые могут быть получены в результате пересечения тел простейшей геометрической формы. Например, параллелепипеды, цилиндры конечных размеров и прямоугольные стержни можно рассматривать как тела, образованные пересечением трех взаимно перпендикулярных пластин, цилиндра и пластины и двух пластин неограниченных размеров, но конечной толщины. Температурные поля таких тел можно найти суперпозицией (наложением) температурных полей тел простейшей формы, полученных численно и аналитически [6]:

1. При граничных условиях II рода решение таких задач можно представить как сумму избыточных температур тел неограниченных размеров, в результате пересечения которых образовалось рассматриваемое тело. Например, температурное поле короткого цилиндра (рис. 3.) можно найти как:

$$T(x_1, x_2, \tau) - T_0 = T_1(x_1, \tau) - T_0 + T_2(x_2, \tau) - T_0, \quad (43)$$

где $T_1(x_1, \tau)$ – избыточная температура бесконечной пластины толщиной $H=2R_1$;

$T_2(x_2, \tau)$ – избыточная температура бесконечного цилиндра диаметром $D=2R_2$.

2. При граничных условиях III рода температурное поле тела сложной формы можно представить как произведение безразмерных температур простейших тел, из которых было получено данное тело. Например, температурное поле параллелепипеда (рис.4.) можно получить как:

$$\Theta(X_1, X_2, X_3, Fo) = \Theta_I(X_1, Fo) \Theta_{II}(X_2, Fo) \Theta_{III}(X_3, Fo), \quad (44)$$

где $X_1 = x_1/R_1$, $X_2 = x_2/R_2$, $X_3 = x_3/R_3$ – безразмерные координаты; $Fo = a\tau/R^2$ – критерий Фурье; $\Theta_I(X_1, Fo)$ – безразмерная температура бесконечной пластины с расчетным размером R_1 ; $\Theta_{II}(X_2, Fo)$ – безразмерная температура бесконечной пластины с расчетным размером R_2 ; $\Theta_{III}(X_3, Fo)$ – безразмерная температура бесконечной пластины с расчетным размером R_3 .

Температурные поля тел простейшей формы, входящие в формулы (43) и (44) рассчитываются по аналитическим выражениям или численно.

4. Расчет термических напряжений в твердых телах классической формы

Неравномерное температурное поле приводит к неодинаковому тепловому расширению отдельных частей тела, что вызывает появление термических (тепловых или температурных) напряжений.

Важно отметить, что при температурах выше 500°C большинство сталей становятся пластичными и сбрасывают возникающие в них термические напряжения. Для таких сталей опасны температуры $T < 500^\circ\text{C}$. Однако для высоколегированных сталей, чугунов и огнеупоров термические напряжения могут превысить предельно допустимые и при более высоких температурах.

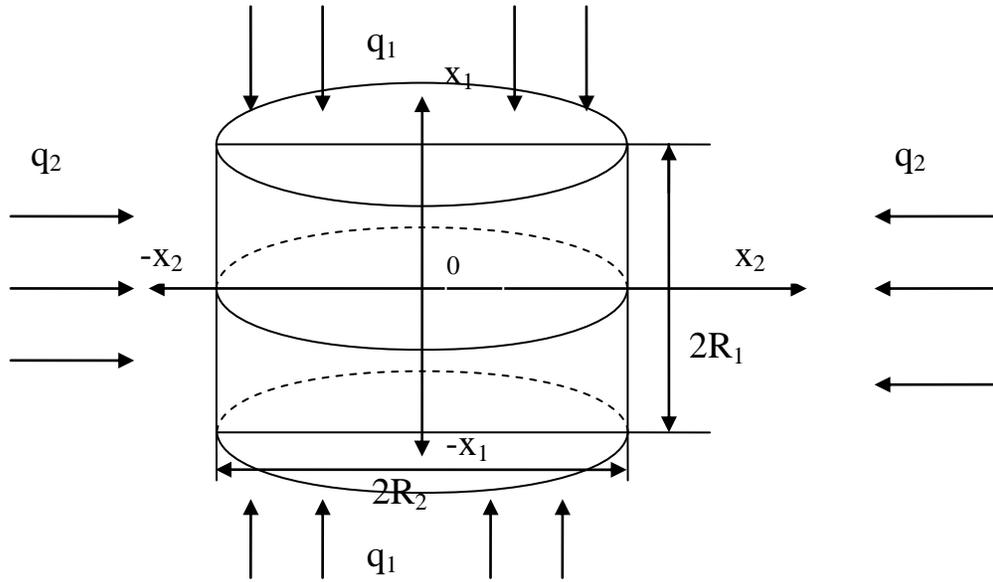


Рис.3. К расчету температурного поля короткого цилиндра при граничных условиях II рода
 $2R_1$ – высота цилиндра; $2R_2$ – диаметр цилиндра

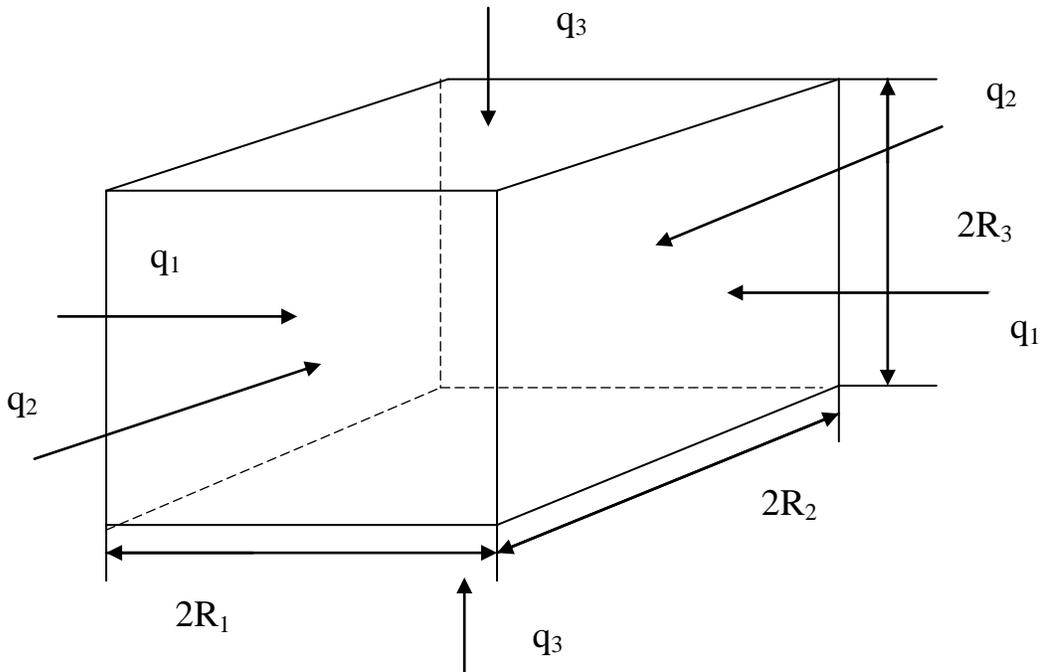


Рис.4. К расчету температурного поля параллелепипеда при граничных условиях III рода
 $2R_1, 2R_2, 2R_3$ – соответственно ширина, длина и высота параллелепипеда

В результате решения плоской несвязной квазистатической задачи теории термоупругости получены расчетные формулы для определения продольных (осевых), радиальных и тангенциальных (касательных) термических напряжений, возникающих в бесконечной пластине, бесконечном цилиндре и шаре в процессе нестационарной теплопроводности [4].

4.1. Расчет продольных напряжений

Термические напряжения возникающие от сил термоупругости, действующие вдоль оси протяженного тела (бесконечной пластины или бесконечного цилиндра) называются **продольными** или **осевыми**.

Расчет продольных термических напряжений, возникающих в протяженном теле постоянного поперечного сечения с незакрепленными торцами, выполняют по формуле:

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\nu} \alpha_T [T_{cp}(Fo) - T(X, Fo)]. \quad (45)$$

Формула (45), также справедлива и для расчета термических напряжений при несимметричном нагреве, описываемом двумерным температурным полем $T(X, Y, Fo)$.

Для протяженного тела закрепленного с торцов выражение для расчета продольных напряжений будет иметь вид:

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\nu} \alpha_T [T_{cp}(Fo) - T_{cp,X}(Fo)] - \alpha_T E [T_{cp}(Fo) - T]. \quad (46)$$

Средние температуры вычисляются по формулам:

а) средняя температура на участке $X=0 \div 1$:

$$T_{cp}(Fo) = k \int_0^1 T(X, Fo) \cdot X^{k-1} dX; \quad (47)$$

б) средняя температура на участке $X=0 \div X$, где X – координата данной точки:

$$T_{cp,X}(Fo) = \frac{k}{X^k} \int_0^X T(X, Fo) \cdot X^{k-1} dX. \quad (48)$$

В формулах (45 ÷ 48) E – модуль упругости, МПа; ν – коэффициент Пуассона; α_T – коэффициент линейного теплового расширения, $1/^\circ\text{C}$; k – коэффициент формы тела.

4.2. Расчет радиальных термических напряжений

При осесимметричном нагреве тел простейшей формы ($k=1, 2, 3$) возникают **поперечные** (неограниченная пластина) или **радиальные** (неограниченный цилиндр и шар) термические напряжения. В этом случае силы термоупругости

направлены поперек пластины или вдоль радиуса цилиндра или шара. Расчетная формула имеет вид:

$$\sigma_r = \frac{E}{k(1-\nu)} \alpha_T [T_{cp}(Fo) - T_{cp,X}(Fo)], \quad (49)$$

где средние интегральные температуры $T_{cp}(Fo)$ и $T_{cp,X}(Fo)$ рассчитывают по формулам (47), (48).

Заметим, что на поверхности тела ($X=1$) радиальные термические напряжения равны нулю, т.к. в этом случае $T_{cp}(Fo)=T_{cp,X=1}(Fo)$.

4.3. Расчет тангенциальных термических напряжений

При симметричном нагреве неограниченного цилиндра наряду с продольными и радиальными напряжениями под действием силы направленной параллельно касательным к поверхности цилиндра возникают тангенциальные (касательные) напряжения:

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu} \alpha_T \left[\frac{1}{2} T_{cp}(Fo) + \frac{1}{2} T_{cp,X}(Fo) - T(X, Fo) \right], \quad (50)$$

где средние интегральные температуры $T_{cp}(Fo)$ и $T_{cp,X}(Fo)$ рассчитываются по формулам (47), (48).

Для цилиндра, незакрепленного с торцов, несложно показать, что сумма радиальных и касательных напряжений в любой точке тела равна осевым:

$$\sigma_z = \sigma_r + \sigma_\varphi. \quad (51)$$

4.4. Алгоритм расчета термических напряжений

Для расчета радиальных, тангенциальных и продольных напряжений, возникающих в теле, необходимо сначала организовать вычисление значений средних температур в интервале от 0 до R и от 0 до X, где R – расчетный размер тела, а X – текущее значение безразмерной координаты. Интегралы в формулах (47) и (48) рассчитывались численно с использованием линейной интерполяции температуры на каждом шаге по координате ΔX [5]. Для этого на каждом отрезке $[i-1, i]$, разбиения по толщине тела от $(i-1)$ го до i –го узла разностной сетки проведена линейная интерполяция по найденным значениям температур T_{i-1} , T_i в узлах $(i-1)$ и i :

$$T = a_i^* + b_i^* X, \quad (52)$$

Коэффициенты a_i^* и b_i^* этой интерполяционной прямой определяются по формулам:

$$a_i^* = T_{i-1} - \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta X} X_{i-1}; \quad b_i^* = \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta X}, \quad (53)$$

где $i = 2, \dots, N$ – число узлов по координате в данном сечении.

Тогда значения средних температур будут вычисляться следующим образом:

$$T_{cp}(Fo) = k \sum_{i=0}^N \frac{a_i^*}{k} (X_i^k - X_{i-1}^k) + \frac{b_i^*}{k+1} (X_i^{k+1} - X_i^{k+1}); \quad (54)$$

$$T_{cp,X}(Fo) = \frac{k}{X_i^k} \sum_{i=0}^n \frac{a_i^*}{k} (X_i^k - X_{i-1}^k) + \frac{b_i^*}{k+1} (X_i^{k+1} - X_i^{k+1}). \quad (55)$$

Алгоритм расчета термических напряжений включает в себя:

1. Задание исходных данных. Дополнительно к условиям однозначности, необходимых для расчета температурного поля тела, должны быть заданы:
 - модуль упругости – E , МПа;
 - коэффициент Пуассона – ν , б/р;
 - коэффициент линейного расширения – α_t , $1/^\circ\text{C}$.
2. Расчет коэффициентов интерполяции a_i^* и b_i^* по формулам (53).
3. Расчет средних температур по формулам (54) и (55).
4. Расчет тангенциальных, радиальных и продольных напряжений по формулам (46), (49) и (50) соответственно.

5. Программная реализация имитационной математической модели

Описанные алгоритмы расчета температурного поля и поля напряжений реализованы в виде исполняемой программы для совместимых с IBM персональных компьютеров с операционной системой Windows95/98/2000/XP/NT.

Программа обеспечивает выполнение следующих функций: ввод необходимых для расчета исходных данных, расчет, отображение результатов расчета. Температурное поле и поля напряжений можно просмотреть на экране дисплея в виде таблиц или графиков.

Программа имеет многооконный интерфейс. Управление окнами осуществляется из меню главного окна программы, отображаемого при ее запуске.

Ниже приведена инструкция для пользования имитационной (численной или аналитической) математической моделью нестационарной теплопроводности и термоупругости.

5.1. Ввод данных для расчета

В программе предусмотрены два типа окон ввода исходных данных для расчета температурных полей и полей термических напряжений тел классической (простейшей) формы (рис.5) и тел сложной формы (рис.6).

Для осуществления ввода исходных данных необходимо в меню главного окна программы выбрать пункт меню “Окно”, подпункт “Новое классическое”, для ввода информации о теле классической формы или подпункт “Новое сложное”, для ввода информации о теле сложной формы.

Ввод информации в окно исходных данных можно произвести с клавиатуры или из файла.

Рис.5. Окно ввода данных для тел классической формы

Выбор метода расчета производится из выпадающего списка “Метод расчета”, при нажатии кнопки со значком стрелки в правой части окна “Метод расчета”. В выпадающем списке выбор осуществляется двойным нажатием левой кнопки мыши при наведенном курсоре на нужный метод. При выборе численного метода будет отображено окно выбора типа разностной схемы.

Выбор формы тела производится из выпадающего списка в окне “Форма тела”, аналогично выбору метода расчета.

Для тел классической формы ввод расчетного размера тела производится установкой курсора в окно “Расчетный размера тела” и вводом с клавиатуры его значения. В качестве разделителя целой и не целой частей может служить точка или запятая. Расчетный размер тела однозначно связан с шагом по координате и числом разностных слоев (см. окно “Параметры расчета”), поэтому при изменении одного из этих значений происходит корректировка остальных значений, если они были введены. Если один из вышеуказанных параметров не введен или введен не правильно, то программа предложит заменить его значение на рассчитанное по двум другим параметрам.

Тела сложной формы(D:\Polygon\Пример №2)

Температурное поле

Метод расчета
 Численный
 ЯРС

Начальная температура тела
 $t_0, ^\circ\text{C}$ 25

Граничные условия

Граничные условия III рода

Температура окружающей среды
 $t_f, ^\circ\text{C}$ 1100

Коэффициент теплоотдачи
 $\alpha, \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ 120

Физические свойства тела

Коэффициент теплопроводности
 $\lambda, \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ 26

Коэффициент температуропроводности
 $a, \text{м}^2/\text{с}$ 6,19047619047619E-

Удельная объемная теплоемкость
 $c', \text{Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$ 4200000

Расчетная область

Время процесса
 $\tau, \text{с}$ 500

Шаг по времени
 $\Delta\tau, \text{с}$ 10

Число временных слоев
 M 50

Форма тела

Призма

Расчетный размер тела	Шаг по координате	Число разностных слоев
X 0,1	Δx 0,01	N 10
Y 0,2	Δy 0,01	N 20
Z 0,25	Δz 0,025	N 10

Рис.6. Окно ввода данных для тел сложной формы

Для тел сложной формы количество и обозначения размеров зависят от выбранной формы тела. Ввод информации по каждому из расчетных размеров аналогичен вводу информации о расчетном размере для тел классической формы.

Взаимосвязь между значениями времени процесса, шагом по времени и числом временных слоев реализована аналогично взаимосвязи между расчетным размером, шагом по координате и числом разностных слоев для тел классической формы.

Ввод типа граничных условий производится из выпадающего списка “Граничные условия”. В соответствии с выбранным типом граничных условий отображаются поля ввода следующих данных: температура поверхности тела - для граничных условий первого рода; плотность теплового потока и тип процесса - для граничных условий второго рода; температура окружающей среды и коэффициент теплоотдачи - для граничных условий третьего рода.

Взаимосвязь между значениями физических свойств тела - коэффициентом теплопроводности, коэффициентом температуропроводности и удельной объемной теплоемкостью - реализована аналогично взаимосвязи между расчетным размером, шагом по координате и числом разностных слоев для тел классической формы.

Для тел классической формы предусмотрен расчет температурного поля при наличии внутреннего источника тепла. Ввод типа источника тепла производится из выпадающего списка “Источник тепла”. В соответствии с выбранным типом источника тепла отображаются поля ввода следующих данных: плотность теплового потока и координата источника (номер слоя) - для точечного источника; объемная плотность теплового потока - для объемного источника. Если источник

тепла отсутствует, то никаких дополнительных данных по источнику тепла вводить не требуется.

Для тел классической формы предусмотрен расчет термических напряжений. Для выполнения расчета напряжений необходимо установить галочку в окне рядом с надписью “Произвести расчет напряжений”. После этого становятся доступны окна для ввода модуля упругости, коэффициента Пуассона и коэффициента линейного расширения.

Последовательное перемещение между окнами ввода данных можно осуществить при помощи клавиши Tab. Произвольный выбор окон ввода можно производить мышью.

Ввод данных из файла в активное окно производится выбором пункта меню главного окна “Файл\ Открыть”. В появившемся диалоговом окне, выбирается файл содержащий исходные данные и нажимается кнопка “Открыть”.

5.2. Расчет

Расчет производится автоматически при выборе любого из подпунктов меню “Результаты расчета”. Расчет производится только для активного, в данный момент окна. Если программа выводит сообщение об ошибке (убрать которое можно с помощью клавиши Enter), то необходимо проконсультироваться с преподавателем, т.к. возможно были введены некорректные значения некоторых параметров. Если ошибка была допущена при вводе исходных данных, то программа выдает соответствующее сообщение и курсор будет перемещен в выделенное окно, с неправильно введенными данными.

Если в процессе вычислений никакой ошибки не возникло, то программа должна вывести на дисплей (в зависимости от выбранного варианта просмотра), либо окно результатов, либо окно выбора плоскости просмотра для тел сложной формы, либо окно выбора вида просмотра для температурного поля тел классической формы. Более подробно работа с результатами расчета рассмотрена в следующем разделе.

Расчет производится каждый раз после внесения пользователем изменений в исходные данные перед просмотром результатов.

5.3. Просмотр результатов расчета

Для просмотра результатов необходимо выбрать в меню главного окна один из пунктов просмотра результатов.

При выборе просмотра температурного поля тела классической формы будет отображено окно выбора просмотра (рис.7). В этом окне можно выбрать размерный и безразмерный варианты вывода значений времени и координаты в окне отображения результатов расчета.

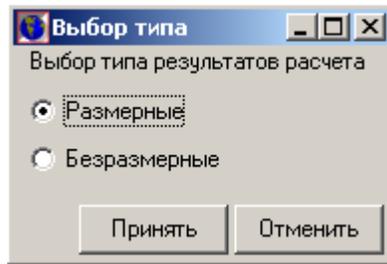


Рис.7. Окно выбора просмотра

Подтвердить выбор можно кнопкой “Принять”, после чего будет выведено окно результатов с соответствующим отображением осей. Отказаться от просмотра результатов можно нажав кнопку “Отменить”.

При выборе просмотра температурного поля тела сложной формы будет отображено окно выбора плоскости просмотра (рис.8). В этом окне можно выбрать оси просмотра изменения температурного поля.

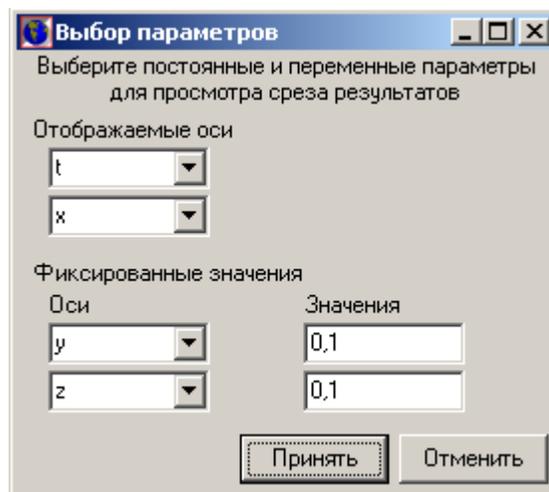


Рис.8. Окно выбора плоскости просмотра

Трехмерные поля отображаются в виде набора двумерных полей на плоскости при фиксированном значении третьей координаты и времени. Просмотр температурного поля по координате и времени возможен при фиксированном значении двух других координат.

Результаты расчета температурного поля и поля термических напряжений отображаются в окне результатов расчета. Например, температурное поле пластины при граничных условиях 3 рода имеет вид (рис.9).

Окно результатов расчета включает в себя следующие вкладки:

- Таблица;
- Просмотр графиков;
- Настройки;
- Таблица просмотра.

Результаты расчета: Температурное поле							
Таблица		t = f(τ)		t = f(x)		Просмотр таблицы	
t, c\х, м	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0	10	10	10	10	10	10	10
150	161,89	163,95	170,28	181,29	197,72	220,67	251,66
300	262,63	265,98	276,14	293,36	318,05	350,76	392,15
450	373,70	377,40	388,53	407,15	433,36	467,25	508,92
600	480,82	484,39	495,09	512,90	537,75	569,57	608,21
750	578,92	582,19	591,98	608,23	630,84	659,65	694,47
900	666,95	669,88	678,66	693,22	713,44	739,17	770,21
1050	745,28	747,89	755,70	768,65	786,62	809,48	837,02
1200	814,75	817,07	824,00	835,48	851,41	871,67	896,07
1350	876,29	878,34	884,48	894,65	908,76	926,69	948,30
1500	930,77	932,58	938,02	947,02	959,51	975,39	994,51

Рис.9. Окно результатов расчета

Содержимое вкладки “Таблица” отображается сразу после расчета. Если открыта какая либо другая вкладка (например, просмотра графиков), можно нажать на вкладку “Таблица” в верхней части окна результата расчета для отображения содержимого вкладки “Таблица”. На этой вкладке результаты расчета представлены в виде таблицы.

Вкладки просмотра результатов расчета в виде графиков расположены на второй и третьей позициях окна просмотра результатов. Названия этих вкладок зависят от выбранного варианта просмотра результатов.

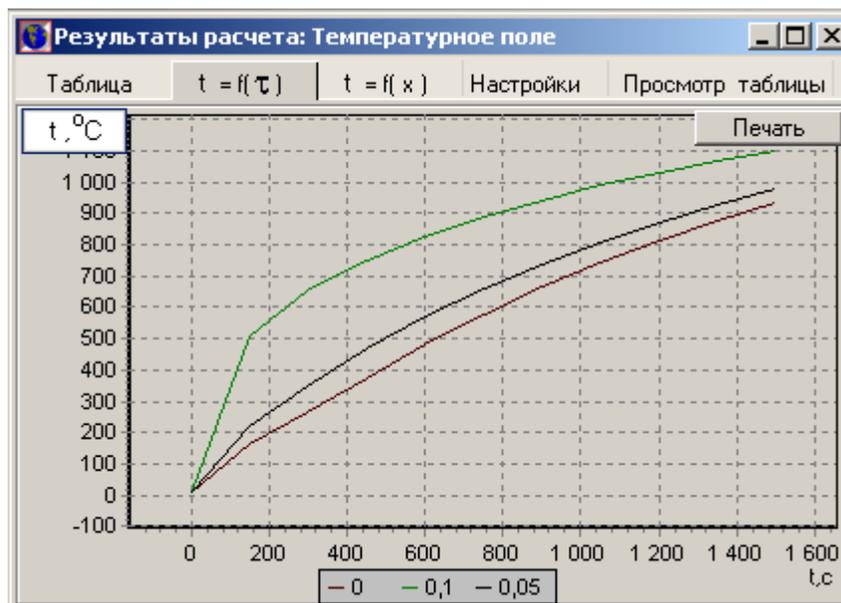


Рис.10. Окно просмотра результатов расчета в виде графиков

При открытии окна просмотра результатов расчета на графиках отображаются только графики для среднего и крайних значений определяющих параметров (рис.10). Чтобы посмотреть графики для других значений, необходимо перейти на вкладку “Настройки”.

Вкладка “Настройки” (рис.11) содержит два окна выбора значений определяющих параметров, для которых могут быть отображены графики.

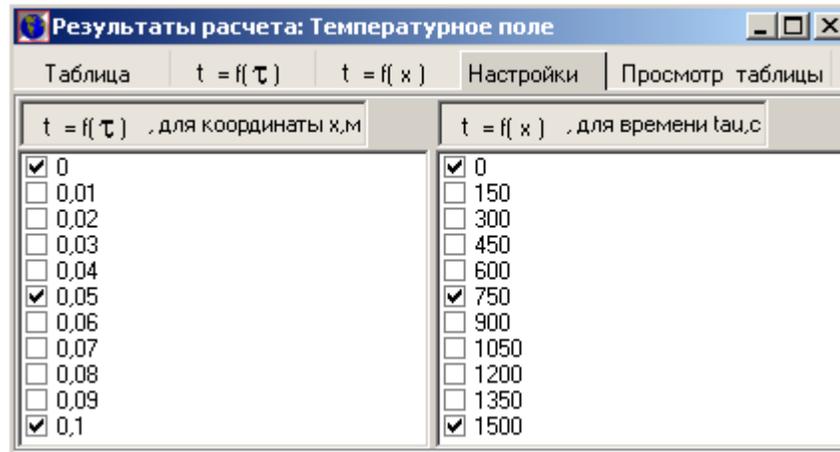


Рис.11. Окно настройки конфигурации отображения результатов

В левом окне настроек можно выбрать значения координат для которых будут отображаться графики изменения температуры во времени. В правом окне настроек можно выбрать значения времени для которых будут отображаться графики температурного поля тела. Для отображения графика надо поставить галочку, слева от выбранного из списка значения. Одновременно не могут отображаться больше чем 11 графиков. При попытке превышения этого числа, будет выведено предупреждающее сообщение.

Для удобного просмотра результатов расчета в виде таблицы предназначено окно просмотра таблицы (рис.12). В нем можно просмотреть значение температуры или напряжений в заданных пользователем точках пространства и в заданные моменты времени.

Выбор координат температурного поля и термических напряжений производится в специальном окне, которое может быть вызвано нажатием кнопки , расположенной в правом нижнем углу окна (рис.13).

В этом окне можно выбрать следующие варианты пространственных и временных координат температурного поля и термических напряжений:

1. “Все” - отображаются значения во всех временных или разностных слоях.
2. “Интервал” - отображаются значения через указанный интервал начиная с значения имеющего указанный порядковый номер.
3. “Список” - отображаются значения координат, которые отмечены галочкой.

$t, \text{°C} / x, \text{m}$	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
0	10	10	10	10	10	10
150	161,89	170,28	197,72	251,66	346,72	508,66
300	262,63	276,14	318,05	392,15	503,66	656,62
450	373,70	388,53	433,36	508,92	615,50	751,72
600	480,82	495,09	537,75	608,21	705,06	825,70
750	578,92	591,98	630,84	694,47	781,04	887,81
900	666,95	678,66	713,44	770,21	847,12	941,61
1050	745,28	755,70	786,62	837,02	905,19	988,82
1200	814,75	824,00	851,41	896,07	956,44	1030,44
1350	876,29	884,48	908,76	948,30	1001,74	1067,23
1500	930,77	938,02	959,51	994,51	1041,81	1099,76

Рис.12. Окно просмотра таблицы

Рис.13. Окно просмотра таблицы с окном настройки отображения

Для формирования таблицы просмотра в соответствии с запросом нужно нажать на кнопку

Окно “настройка отображения” можно убрать, нажав кнопку

5.4. Сохранение результатов расчета и окончание работы

Сохранить исходные данные и результаты расчета можно выбрав в меню главного окна пункт “Файл\Сохранить” или “Файл\Сохранить как”.

Пункт меню “Файл\Сохранить” сохраняет информацию в файл из которого были загружены данные или в который ранее производилось сохранение данных.

В случае если работа с файлами ранее не производилась этот пункт аналогичен пункту “Файл\Сохранить как”.

Пункт меню “Файл\Сохранить как” сохраняет информацию в выбираемый пользователем файл. Для выбора файла пользователю предлагается окно выбора имени файла для сохранения.

Завершить работу с активным окном ввода данных можно выбрав в меню главного окна пункт “Файл\Закреть” или нажав крестик в правом верхнем углу активного окна.

Завершить работу с программой, можно нажав в окне ввода данных комбинацию клавиш Alt+F4 или крестик в правом верхнем углу главного окна, или выбрав в меню главного окна пункт “Выход”.

5.4. Печать исходных данных и результатов

Для распечатки исходных данных необходимо в меню главного окна программы выбрать пункт меню “Файл\Печать”.

Для распечатки результатов расчета в виде графиков необходимо нажать кнопку “Печать”, расположенную в правом верхнем углу окна просмотра результатов расчета в виде графиков (рис.10).

Для распечатки результатов расчета в виде таблицы необходимо сформировать таблицу просмотра и нажать кнопку , расположенную справа сверху от сформированной таблицы в окне результатов расчета.

6. Проверка адекватности численной математической модели

Численная математическая модель нестационарной теплопроводности с той или иной степенью достоверности отражает изменение температуры в узлах сеточной области, то есть является приближенной математической моделью. В связи с этим необходимо оценить ее точность или иными словами проверить адекватность (достоверность) численной математической модели, ее соответствие реальному процессу нестационарной теплопроводности.

Адекватность математических моделей можно проверить сравнением результатов численного расчета с результатами измерений на натурном образце, либо сравнением численного расчета с аналитическим решением краевой задачи, если таковое можно получить для частного случая линейной математической модели.

В нашем случае математической формулировки задачи нестационарной теплопроводности (1)÷(8) целесообразно проверить результаты расчета, полученные на имитационной математической модели, с результатами расчета по формулам аналитического решения.

Рассмотрим аналитические решения линейной краевой задачи теории теплопроводности для трех тел простейшей формы при граничных условиях I, II, III рода и равномерном начальном распределении температуры [6].

6.1. Аналитические решения при граничных условиях I рода

Аналитическое решение при граничных условиях I рода имеет вид:

$$T(X, Fo) = T'(X, Fo) + T''(X, Fo), \quad (56)$$

где $T'(X, Fo)$ - составляющая температурного поля, учитывающая влияние граничных условий; $T''(X, Fo)$ - составляющая температурного поля, учитывающая влияние начальных условий на развитие температурного поля $T(X, Fo)$. Частные температурные поля $T'(X, Fo)$ и $T''(X, Fo)$ рассчитывают по формулам

$$T'(X, Fo) = T(1, Fo) - 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Lambda_1}{\delta_l} \exp(-\delta_l^2 Fo) \int_0^{Fo} \exp(+\delta_l^2 \varepsilon) \frac{dT(1, \varepsilon)}{d\varepsilon} d\varepsilon; \quad (57)$$

$$T''(X, Fo) = 2 \sum_{l=1}^{\infty} \Lambda_1 \exp(-\delta_l^2 Fo) \int_0^1 \Lambda_1 [T(X, Fo) - T(1, Fo)] dx, \quad (58)$$

где Λ_1 - лямбда-функция температурного поля при граничных условиях I рода - функция, отражающая закон изменения температуры по сечению тела и обобщенная на все три тела простейшей формы:

$$\Lambda_1 = \frac{X^{\frac{2-k}{2}} J_{\frac{k-2}{2}}(\delta_l X)}{J_{\frac{k}{2}}(\delta_l)}, \quad (59)$$

где $J_m(u)$ - функция Бесселя первого рода порядка "m" от аргумента "u"; δ_l - корни характеристического уравнения

$$J_{\frac{k-2}{2}}(\delta_l) = 0 \quad (60)$$

Заметим, что при не изменяющейся во времени температуре поверхности $T_w = \text{const}$ производная по времени в подынтегральном выражении (57) $dT(1, \varepsilon)/d\varepsilon$ равна нулю. В этом случае составляющая температурного поля, учитывающая влияние граничных условий, равна температуре поверхности:

$$T'(X, Fo) = T(1, Fo) = T_w. \quad (61)$$

В установившемся (регулярном) режиме ($Fo > 0,2$) для расчета составляющей температурного поля $T''(X, Fo)$ можно ограничиться одним членом ряда, а начиная с $Fo > 1,8$ составляющей $T''(X, Fo)$ можно пренебречь.

6.2. Аналитическое решение при граничных условиях II рода

Безразмерная температура $\Theta(X, Fo)$ определяется выражением (10) и в этом случае рассчитывается по формуле

$$\Theta(X, Fo) = kFo + \frac{X}{2} - \frac{k}{2(2+k)} - 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Lambda_2(v_l)}{v_l^2} \exp(-v_l^2 Fo), \quad (62)$$

в которой $\Lambda_2(\nu_l)$ – лямбда-функция температурного поля при граничных условиях II рода:

$$\Lambda_2(\nu_l) = \frac{X^{\frac{2-k}{2}} J_{\frac{k-2}{2}}(\nu_l X)}{J_{\frac{k}{2}}(\nu_l)}, \quad (63)$$

где ν_l - корни характеристического уравнения

$$J_{\frac{k}{2}}(\nu_l) = 0. \quad (64)$$

Регулярный режим нагрева (охлаждения) наступает начиная с $Fo > 1/(2k)$. В этом случае безразмерная температура по сечению тела изменяется по закону параболы:

$$\Theta(X, Fo) = kFo + \frac{X}{2} - \frac{k}{2(2+k)}. \quad (65)$$

Максимальный перепад температуры по сечению тела

$$\Delta T = \frac{q_w R}{2\lambda}. \quad (66)$$

Время запаздывания в достижении значения температуры в тепловом центре тела ($X=0$) значения температуры на поверхности тела ($X=1$)

$$\Delta Fo_{0-1} = \frac{1}{2k}. \quad (67)$$

Рассчитав безразмерную температуру $\Theta(X, Fo)$, легко определить температуру $T(X, Fo)$ из выражения (10):

$$T(X, Fo) = T_0 + \Theta(X, Fo) \frac{q_w R}{\lambda}. \quad (68)$$

6.3. Аналитическое решение при граничных условиях III рода

Аналитическое решение имеет вид:

$$\Theta(X, Fo) = 2 \sum_{l=1}^{\infty} A_l \Lambda_2(\mu_l X) \exp(-\mu_l^2 Fo), \quad (69)$$

где

$$A_l = \frac{2Bi}{Bi^2 + (2-k)Bi + \mu_l^2}; \quad (70)$$

$$\Lambda_2(\mu_l X) = \frac{X^{\frac{2-k}{2}} J_{\frac{k-2}{2}}(\mu_l X)}{J_{\frac{k-2}{2}}(\mu_l)}; \quad (71)$$

Λ_2 – лямбда-функция температурного поля при граничных условиях III рода; μ_l - корни характеристического уравнения

$$\text{Bi} J_{\frac{k-2}{2}}(\mu_l) = \mu_l J_{\frac{k}{2}}(\mu_l). \quad (72)$$

Регулярный режим нагрева (охлаждения) наступает при $Fo > 1/(3k)$. В этом случае можно пренебречь всеми членами ряда (69), кроме первого:

$$\Theta(X, Fo) = 2A_1 \Lambda_2(\mu_1 X) \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (73)$$

Рассчитав $\Theta(X, Fo)$ по формуле (69) либо по формуле (73), значение температуры $T(X, Fo)$ легко найти из выражения (11):

$$T(X, Fo) = T_f - \Theta(X, Fo) (T_f - T_0). \quad (74)$$

6.4. Алгоритм расчета температурного поля по аналитическому решению

Для расчета температурного поля в телах простейшей формы аналитические решения (57), (58), (62) и (69) необходимо применять в следующей последовательности.

1. Предварительно задают входные параметры аналитической модели:

- коэффициент формы тела - k , б/р;
- размер расчетной области - R , м;
- удельная объемная теплоемкость - c' Дж/м³К;
- коэффициент температуропроводности - a , м²/с;
- коэффициент теплопроводности - λ , Вт/(мК);
- начальная температура тела - T_0 , °С.

2. Решая характеристическое уравнение, находят его корни:

- при граничных условиях I рода, решая характеристическое уравнение (60), находят $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l$;
- при граничных условиях II рода, решая характеристическое уравнение (64), находят $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l$;
- при граничных условиях III рода, решая характеристическое уравнение (72), находят $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$.

Решение характеристического уравнения осуществлено при помощи аппарата численного решения нелинейных уравнений.

3. Рассчитывают значение лямбда - функции:

- при граничных условиях I рода - Λ_1 ;
- при граничных условиях II рода - $\Lambda_2(\nu_l)$;
- при граничных условиях III рода - $\Lambda_2(\mu_l X)$.

4. Находят сумму ряда и получают:

- при граничных условиях I рода - $T(X, Fo)$;
- при граничных условиях II и III рода - $\Theta(X, Fo)$.

5. При граничных условиях II и III рода по значениям $\Theta(X, Fo)$ рассчитывают значение температуры $T(X, Fo)$.

Описанный выше алгоритм реализован в виде вычислительной программы описанной в разделе 5.

7. Задания к лабораторной работе

Задание 1. На имитационной математической модели рассчитать температурное поле при нагреве или охлаждении для всех трех тел простейшей формы, но только для одного из трех родов граничных условий. Выполнить анализ влияния формы тела на развитие температурного поля. Метод расчета (численный или аналитический) задает преподаватель.

Задание 2. На имитационной математической модели рассчитать температурное поле для одного из трех тел простейшей формы (бесконечная пластина, бесконечный цилиндр или шар) при граничных условиях I, II и III рода. Проанализировать изменение температуры тела по сечению тела и во времени. Метод расчета (численный или аналитический) задает преподаватель.

Задание 3. На имитационной математической модели рассчитать температурное поле для одного из трех тел простейшей формы (по указанию преподавателя) при одном из граничных условий (по указанию преподавателя), если тело изготовлено из материалов с разными теплофизическими свойствами, например из стали, огнеупора и тепловой изоляции. Выполнить анализ влияния теплофизических свойств вещества на температурное поле. Метод расчета (численный или аналитический) задает преподаватель.

Задание 4*. На имитационной математической модели при граничных условиях III рода путем перебора вариантов выбрать режим нагрева (охлаждения) одного из трех тел простейших форм с заданными параметрами в конце нагрева или охлаждения: температура поверхности тела - $T(R, \tau_k)$ и перепад температуры по сечению тела в конце нагрева - ΔT_k . В качестве варьируемых параметров принять коэффициент теплоотдачи α и время нагрева (охлаждения) τ_k . Метод расчета (численный или аналитический) задает преподаватель. Варианты расчетов целесообразно фиксировать в табл. 4.

Задание 5*. На имитационной математической модели при одинаковых параметрах разностной сетки выполнить расчеты температурного поля по явной, чисто неявной разностным схемам и разностной схеме Кранка-Николсона. Сравнить результаты численного расчета с расчетами по аналитическому решению и сделать вывод о точности разностных схем.

Задание 6. На имитационной математической модели при граничных условиях III рода рассчитать термические напряжения на поверхности и оси тела в момент достижения температуры на поверхности значения T_w . Исходные данные приведены в табл. 6, номер варианта задает преподаватель.

Таблица 4. Варианты числового расчета на имитационной математической модели (к заданию 4*)

Номер варианта	Время нагрева, τ_k	Коэффициент теплоотдачи, α	Температура поверхности в конце нагрева, $T(R, \tau_k)$	Температура центра в конце нагрева, $T(0, \tau_k)$	Перепад температуры, ΔT_k

Таблица 5. Рекомендуемые варианты исходных данных к заданиям 1÷5 ($k=1, 2, 3$)

Номер варианта	λ Вт/мК	a м ² /с	c' Дж/м ³ К	R м	T_o °С	τ_k с	Г.У.	Параметры
1	30	10^{-5}	–	0,1	20	600	I II III	$T_w = 1000$ °С $q = 10000$ Вт/м ² (нагрев) $T_f = 1000$ °С $\alpha = 300$ Вт/(м ² К)
2	1,0	–	10^6	0,05	100	1800	I II III	$T_w = 1000$ °С $q = 5000$ Вт/м ² (нагрев) $T_f = 1000$ °С $\alpha = 250$ Вт/(м ² К)
3	20	10^{-5}	–	0,2	500	1600	I II III	$T_w = 100$ °С $q = 10000$ Вт/м ² (охлаждение) $T_f = 100$ °С $\alpha = 150$ Вт/(м ² К)
4	32	–	$4 \cdot 10^6$	0,18	650	2200	I II III	$T_w = 50$ °С $q = 15000$ Вт/м ² (охлаждение) $T_f = 60$ °С $\alpha = 180$ Вт/(м ² К)

Задание 7. Тело классической формы нагревается при граничных условиях I рода. На имитационной математической модели рассчитать распределение температурных напряжений по сечению тела в момент времени τ_k . Рекомендуемые варианты исходных данных приведены в табл. 6.

Задание 8*. На имитационной математической модели, методом перебора вариантов, определить минимальное время нагрева и максимально допустимый тепловой поток позволяющий нагреть тело до заданной температуры на поверхности T_w , если максимально допустимые термические напряжения равны σ_d . В качестве варьируемых параметров принять время нагрева τ_k и плотность

теплового потока q . Исходные данные приведены в табл. 6. Варианты расчетов целесообразно фиксировать в табл. 7.

Задание 9. На имитационной математической модели определить температуры в различных точках тела сложной формы (согласно варианту заданному преподавателем см. табл. 8.), равномерно нагреваемому со всех сторон. Провести анализ полученных результатов расчета, схематично на рисунке указать точки с максимальной и минимальной температурой тела, ребер и граней. Определить максимальный перепад температур в теле.

Таблица 6. Рекомендуемые варианты исходных данных к заданиям 6 ÷ 8.

Номер варианта	1	2	3
<u>Для задания 6. ГУ III р.</u>			
$T_f, ^\circ\text{C}$	1000	800	1200
$\alpha, \text{Вт/м}^2\text{К}$	120	110	223
$T_w, ^\circ\text{C}$	520	400	600
<u>Для задания 7. ГУ I р.</u>			
$T_w, ^\circ\text{C}$	600	500	580
$\tau_k, \text{с}$	500	720	650
<u>Для задания 8*.</u>			
$T_w, ^\circ\text{C}$	500	580	610
$\sigma_d, \text{МПа}$	170	230	250
Для заданий 6 ÷ 8			
форма тела	бесконечная пластина	бесконечный цилиндр	шар
$R, \text{м}$	0,1	0,2	0,15
$T_0, ^\circ\text{C}$	25	20	100
$\lambda, \text{Вт/мК}$	26	30	20
$a, \text{м}^2/\text{с}$	–	$5,85 \cdot 10^{-6}$	10^{-6}
$\epsilon', \text{Дж/м}^3\text{К}$	$4,2 \cdot 10^6$	–	–
$E, \text{Мпа}$	$1,6 \cdot 10^5$	$1,8 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$
ν	0,3	0,3	0,3
$\alpha_T, 1/\text{К}$	$10,2 \cdot 10^{-6}$	$11,5 \cdot 10^{-6}$	$12 \cdot 10^{-6}$

Таблица 7. Варианты числового расчета на имитационной математической модели (к заданию 8*)

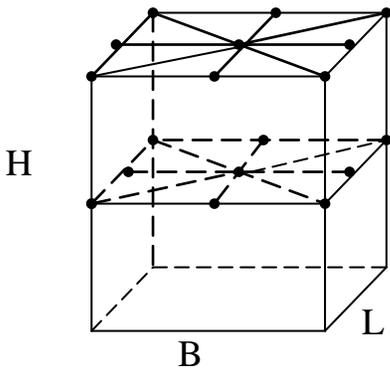
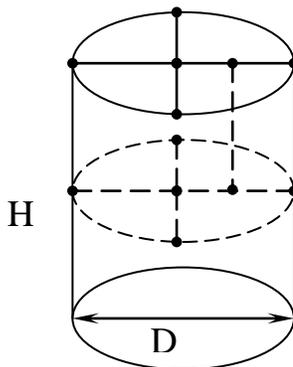
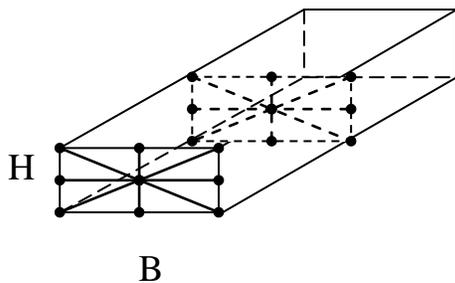
Номер варианта	Время нагрева, τ_k, c	Плотность теплового потока, $q, \text{Вт/м}^2$	Температура поверхности в конце нагрева, $T(R, \tau_k)$	Максимальное значение термических напряжений (по расчету), $\sigma_{\max}, \text{МПа}$	Максимально допустимые термические напряжения (по заданию), $\sigma_d, \text{МПа}$

Условия однозначности для всех заданий задает преподаватель. Рекомендуется использовать следующие входные данные:

- расчетный размер тела классической формы: $R = 0,1 \div 0,5 \text{ м}$;
- для тел сложной формы расчетный размер лежит в пределах $R_i = 0,05 \div 0,6 \text{ м}$;
- начальная температура тела: $T_0 = 0 \div 100 \text{ }^\circ\text{C}$ при нагреве и $T_0 = 400 \div 1000 \text{ }^\circ\text{C}$ при охлаждении;
- теплофизические свойства стали: $\lambda = 20 \div 45 \text{ Вт/(мК)}$,
 $a = 5 \cdot 10^{-6} \div 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $c' = 4 \cdot 10^6 \div 4,5 \cdot 10^6 \text{ Дж/м}^3\text{К}$;
- механические свойства стали: $\alpha_T = 11 \cdot 10^{-6} \div 16 \cdot 10^{-6} \text{ 1/К}$,
 $\nu = 0,3$, $E = 1,5 \cdot 10^5 \div 2,5 \cdot 10^5 \text{ МПа}$;
- теплофизические свойства огнеупора: $\lambda = 1 \div 2,5 \text{ Вт/(мК)}$,
 $a = 5 \cdot 10^{-7} \div 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ и $c' = 2 \cdot 10^6 \div 2,5 \cdot 10^6 \text{ Дж/м}^3\text{К}$;
- теплофизические свойства тепловой изоляции:
 $\lambda = 0,05 \div 0,5 \text{ Вт/(мК)}$, $a = 10^{-7} \div 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ и $c' = 5 \cdot 10^5 \div 10^6 \text{ Дж/м}^3\text{К}$;
- погрешность численного расчета: $\varepsilon(\Delta x, \Delta \tau) = 1 \div 50 \text{ }^\circ\text{C}$;
- при граничных условиях I рода температура поверхности:
 $T_w = 500 \div 1000 \text{ }^\circ\text{C}$ при нагреве и $T_w = 0 \div 900 \text{ }^\circ\text{C}$ при охлаждении;
- при граничных условиях II рода поверхностная плотность теплового потока:
 $q = 10 \div 10^5 \text{ Вт/(м}^2\text{)}$;
- при граничных условиях III рода: температура среды $T_f = 700 \div 1300 \text{ }^\circ\text{C}$ при нагреве и $T_f = 0 \div 100 \text{ }^\circ\text{C}$ при охлаждении; коэффициент теплоотдачи $\alpha = 10 \div 10000 \text{ Вт/(м}^2\text{К)}$.

Таблица 8. Рекомендуемые варианты исходных данных к заданию 9

Номер	Номер	Г.У.	Форма тела	Разме-
-------	-------	------	------------	--------

варианта	вар. табл. 5			ры, м
1 2 3 4	1 2 3 4	II р. III р. II р. III р.	<p>Параллелепипед</p> 	$H = 0,4$ $B = 0,2$ $L = 0,1$
5 6 7 8	1 2 3 4	II р. III р. II р. III р.	<p>Короткий цилиндр</p> 	$H = 0,3$ $D = 0,15$
9 10 11 12	1 2 3 4	II р. III р. II р. III р.	<p>Бесконечный Брус</p> 	$H, B \ll L$ $H = 0,1$ $B = 0,3$
<p>Замечание: числовые значения теплофизических свойств, краевые условия и время процесса принять из табл. 5. согласно указанного варианта</p>				

8. Порядок выполнения лабораторной работы

1. Получить у преподавателя задание и исходные данные для расчета (см. раздел 7).
 2. Написать математическую формулировку поставленной преподавателем задачи (см. раздел 2).
 3. При использовании численного метода расчета написать разностную схему (по указанию преподавателя) краевой задачи теплопроводности (см. раздел 3). Выбрать шаги по пространству Δx и времени Δt : для явной разностной схемы – по формулам (27) и (28), а для неявных схем – по формулам (39) и (40). При использовании только аналитического решения шаги Δx и Δt задает пользователь.
 4. Выполнить расчет на имитационной математической модели (см. раздел 5).
 - 4.1. Ввести исходные данные.
 - 4.2. Выполнить расчет.
 - 4.3. Зафиксировать в отчете по лабораторной работе результаты расчета.
 5. Проверить адекватность численной математической модели (см. раздел 6). Если погрешность численного расчета превышает наперед заданную, повторить расчет с меньшими параметрами разностной сетки Δx и Δt .
 6. Результаты расчета представить графически, построив в масштабе изменения температуры и термических напряжений по сечению тела для 3-4 моментов времени и изменение температуры и термических напряжений в 3-4 точках тела во времени.
 7. Выполнить анализ результатов расчета.
- Все вышеперечисленные пункты должны быть отражены в отчете по лабораторной работе.

9. Вопросы для самоконтроля

1. Дать характеристику понятий "модель", "математическая модель", "математическое моделирование".
2. В чем состоит преимущество детерминированных математических моделей по сравнению с функциональными?
3. Что такое настроечные коэффициенты?
4. В чем заключается процедура адаптации математической модели?
5. Для каких целей используются математические модели?
6. Этапы создания детерминированных математических моделей.
7. Классификация детерминированных математических моделей.
8. Что такое "разностная схема решения краевой задачи"?
9. Дать характеристику понятий "аппроксимация", "сходимость", "устойчивость" и "консервативность" разностной схемы.
10. При выполнении каких условий разностная схема является сходящейся?
11. В чем заключаются преимущества и недостатки явной, чисто неявной и неявной разностной схемы Кранка-Николсона?
12. Охарактеризуйте граничные условия I, II и III рода.

13. Какие стадии нагрева (охлаждения) существуют при граничных условиях I, II и III рода?
14. Какие тела называются телами сложной формы?
15. Опишите алгоритм расчета температурных полей тел сложной формы при граничных условиях II и III рода.
16. Дайте характеристику понятий термоупругость и термические напряжения.
17. Охарактеризуйте продольные, радиальные и тангенциальные термические напряжения.
18. От каких параметров зависит величина термических напряжений?

Список литературы

1. Арутюнов В.А., Бухмиров В.В., Крупенников С.А. Математическое моделирование тепловой работы промышленных печей: Учебник для ВУЗов. – М: Металлургия, 1990. – 239 с.
2. Автоматизированный обучающий модуль. Исследование процесса нестационарной теплопроводности на имитационной математической модели: Метод. указания./ Иван. энерг. ин-т им. В.И. Ленина; Сост. В.М. Шипилов, В.В. Бухмиров. – Иваново, 1985, 16 с.
3. Исследование процесса нестационарной теплопроводности на численной имитационной математической модели: Метод. указания. Сост. В.В. Бухмиров, Е.Е. Мезина, Т.Е. Созинова. – Иваново, 1997, 31с.
4. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – Наукова Думка, Киев, 1970.-307с.
5. Прошивная оправка. Вавилкин Н.М., Бухмиров В.В. Научн. изд. М.: МИСиС, 2000. – 128 с.
6. Бровкин Л.А. Температурные поля тел при нагреве и плавлении в промышленных печах, Иваново, 1973 , 364 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
И ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ НА ЧИСЛЕННОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Методические указания к лабораторной работе

Составители: БУХМИРОВ Вячеслав Викторович
 СОЗИНОВА Татьяна Евгеньевна
 НОСОВА Светлана Владимировна
 НИКИТИН Константин Борисович